Navigational Algorithms

La Derrota

Índice

¿Cómo navegamos desde nuestra posición actual hasta el punto de destino?, ¿A que rumbo debemos pilotar, y cual es la distancia que nos separa de nuestra llegada? Esta sección responde a estas preguntas y hace un repaso de las diversas técnicas analíticas para resolver los correspondientes problemas.

Se aborda la derrota loxodrómica, su forma simplificada de cálculo basada en la latitud media, y la derrota ortodrómica y mixta. La ortodrómica se resuelve empleando la trigonometría esférica y el análisis vectorial.

Por ultimo se añaden unos ejemplos ilustrativos, y se adjuntan unas tablas de latitudes aumentadas, de ayuda en la resolución de los problemas asociados a la loxodrómica.

San Sebastián – Donostia
43º 19’N 002ºW
Versión: 201109

La derrota

En navegación, al trasladarnos de un lugar a otro se puede hacer a rumbo constante, (derrota loxodrómica), o siguiendo lo más fielmente posible un círculo máximo, que marca la distancia más corta entre dos puntos de la esfera terrestre, (derrota ortodrómica).

Generalmente se distinguen dos tipos de problemas:

1. *Directo*: consistente en hallar la situación de llegada, a partir de una de salida, cuando se navega una distancia a un rumbo dado.
2. *Inverso*: calcula el rumbo y la distancia entre una posición de salida y otra de llegada.

Estos problemas se resuelven usando diversas técnicas y aproximaciones. Existen métodos gráficos sobre la carta náutica, y analíticos que no necesitan a priori de ella. La Tierra se puede considerar como una esfera, como un elipsoide de revolución, o como un geoide, (superficie equipotencial en el campo de la gravedad terrestre).

Asumiendo un modelo esférico de La Tierra, el error cometido para grandes distancias, (varios miles de millas), es de unas pocas millas, que generalmente es muy inferior al error debido a la deriva, a los errores de gobierno y al abatimiento.

Para distancias no muy grandes se puede utilizar sin cometer errores considerables, y despreciando los incrementos de distancia, el método más simple, que utiliza un modelo esférico de La Tierra y considera la diferencia en longitud entre dos puntos, proporcional a la latitud media.

Variables

Las variables generales usadas en los cálculos de derrotas son las siguientes:

B1	Latitud del punto de partida
L1	Longitud del punto de partida
B2	Latitud del punto de destino
L2	Longitud del punto de destino
d	Distancia entre 1 y 2
R	Rumbo
ΔB	Diferencia de latitud
ΔL	Diferencia de longitud

Se consideran la latitud Norte y la longitud Este, como positivas.

	Intervalos
B	-90º (S) <= B <= +90º (N)
L	-180º (W) <= L <= +180º (E)
R	0º <= R <= 360º
d	d > 0

Latitud Media

Variables

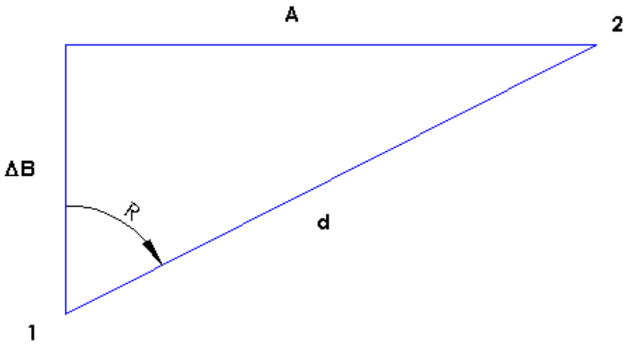
A	Apartamiento
Bm	Latitud media

Este método es una aproximación a la derrota loxodrómica, que simplifica los cálculos, consiguiendo un error aceptable en navegación dentro de unos ***Límites de aplicación***:

- $B_m < 60^\circ$
- $d < 200$ nm
- $\Delta B < 5^\circ$

Se utiliza sobre todo cuando se navega por estima, en donde si se obtiene una situación verdadera que corrija la estimada, dentro de un intervalo de tiempo aceptable, el error obtenido en esta simplificación es totalmente despreciable.

Se basa en la resolución del triángulo plano de la figura, y en la relación entre el apartamiento y la diferencia de longitud:



Relación entre el apartamiento y la diferencia de latitud.

- $\Delta B = d \cos R$
- $A = d \sin R$
- $\Delta L = A / \cos B_m$
- $B_m = (B1 + B2)/2$

Posición de llegada

$\Delta B = d \cos R$
$A = d \sin R$
$\Delta L = A / \cos Bm$

$B2 = B1 + d \cos R$
$L2 = L1 + d \sin R / \cos Bm$

Rumbo y Distancia entre dos puntos

$\Delta B = B2 - B1$
$\Delta L = L2 - L1$
$A = \Delta L \cos Bm$

$$d = \sqrt{\Delta B^2 + A^2}$$

R = arctan(A/ΔB)

d = d/60 [nm]
if(R<0) R=R+360º

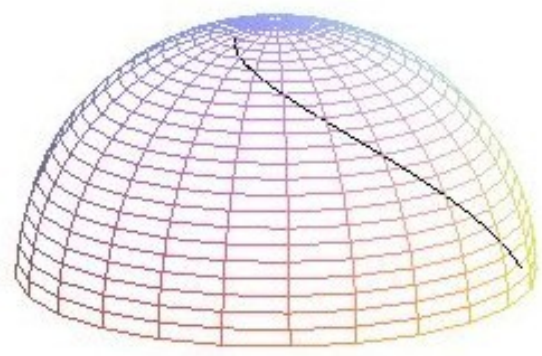
Ejemplo

(B1, L1) = (43º 40.5'N 02º 0.00'W)
(B2, L2) = (45º 36.2'N 03º 15.5'W)

d = 127.56 millas náuticas
R = 335.09º

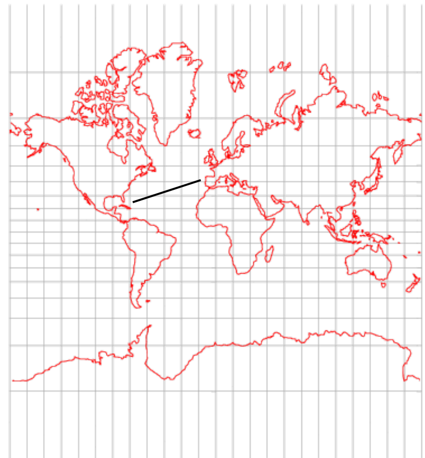
Derrota Loxodrómica

Cuando se navega a rumbo constante R, se sigue una loxodrómica sobre la superficie del mar. Esta línea corta a todos los meridianos bajo el mismo ángulo R.



Loxodrómica sobre la esfera terrestre.

En la *carta mercatoriana*, la derrota loxodrómica se traza como una recta.



Loxodrómica sobre la carta mercatoriana.

Resuelve analíticamente los problemas de derrota trazados en una carta náutica mercatoriana. Utiliza la diferencia de partes meridionales, **m = ΔM**, para el cálculo de la diferencia de longitud, **ΔL**, en función del rumbo, **R**:

$$\tan R = \Delta L / m$$

Según esto la ecuación de la Loxodrómica queda:

$$L2 = L1 + m \tan R$$

La distancia navegada se obtiene en función de la diferencia de latitud, **ΔB**, y del rumbo:

d = ΔB/cos R

Partes Meridionales o Latitud aumentada

Para calcular la latitud aumentada correspondiente a una latitud, es necesario integrar la distancia del ecuador al paralelo de dicha latitud, a lo largo del meridiano.

En un elipsoide de eje mayor **a**, eje menor **b** y de excentricidad **e**, se tiene:

$$L_2 = L_1 + \tan R \int_{B1}^{B2} \frac{1-e^2}{\cos B(1-e^2\sin^2 B)} \cdot dB$$

$$M(B) = a\int_0^B \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} \cdot dB$$

Integral que se puede aproximar por un desarrollo en serie, en donde la precisión obtenida depende del grado de la expansión:

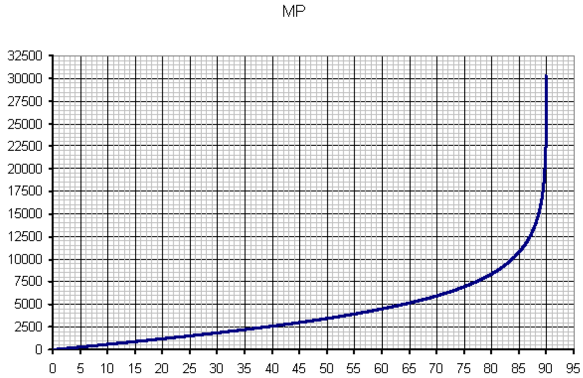
$$M = a \log_e 10 \log \tan\left(45+\frac{L}{2}\right) - a\left(e^2 \sin L + \frac{e^4}{3}\sin^3 L + \frac{e^6}{5}\sin^5 L + \ldots \right),$$

Y de forma exacta:

$$M(B) = a \cdot \mathrm{Ln}\left(\tan(45 + B/2)\left(\frac{1-e\cdot\sin B}{1+e\cdot\sin B}\right)^{e/2}\right)$$

Tomando como modelo de La Tierra el elipsoide ***WGS84***, (World Geodetic System), el algoritmo de cálculo es el que sigue:

```
a = 6378137/1852
f = 1.0/298.257223563
e = sqrt(2*f-SQ(f))
M1 = log(10)*log10(tan( 45+B/2) )
M2 = SQ( eoe )*sin( B )
M3 = pow( eoe, 4 )/3*pow( sin( B ), 3)
M4 = pow( eoe, 6 )/5*pow( sin( B ), 5)
M = a*(M1-M2-M3-M4)
```



Curva de M frente a la latitud

Si se toma un ***modelo esférico*** de La Tierra, los dos ejes son iguales:

Ejes: a = b = R_T = 360*60/(2π) [millas náuticas]

Achatamiento: f=1-b/a=0

excentricidad: e = 0

Con estas simplificaciones la integral tiene solución exacta.

$$M = a\int_0^B \sec B \cdot dB$$

M = 21600/(2π)*Ln(tan(45+B/2))

Expresiones equivalentes utilizando las funciones hiperbólicas son:

M = 21600/(2π)*arctanh(sin B)

M = 21600/(2π)* arcsinh(tan B)

Casos singulares

Si se navega siguiendo un paralelo o un meridiano el rumbo toma un valor en el cual las funciones trigonométricas se anulan o se hacen infinitas, y las diferencias de latitud o de longitud toman valores singulares:

	R [º]	sin R	cos R	tan R	ΔB	ΔL
N	0	0	1	0	d	0
E	90	1	0	∞	0	d/cos B
S	180	0	-1	0	-d	0
W	270	-1	0	∞	0	-d/cos B

Posición

Datos necesarios:

- Posición de salida
- Rumbo
- Distancia navegada.

Latitud de Llegada:

```
ΔB = d/60 * COS( R )
B2 = B1 + ΔB
```

Longitud de Llegada:

```
if( R == 90 || R == 270 )
  ΔL = d/60 * sin R/cos B
else {
  m = (M(B2)-M(B1))/60
  ΔL = m * tan R
  }
L2 = L1 + ΔL
```

Rumbo y Distancia

Datos necesarios:

- Posición de salida
- Posición de llegada

```
ΔB = B2 - B1
ΔL = L2 - L1
m = (M(B2)-M(B1))/60
```

Rumbo:

```
if( abs( m ) > 0 ) {
  R = atan( ΔL/m )
  if( m >= 0 AND ΔL >= 0 )
    R = R
  else if( m <= 0 AND ΔL >= 0 )
    R = R + 180°
  else if( m <= 0 AND ΔL <= 0 )
    R = R + 180°
  else if( m >= 0 AND ΔL <= 0 )
    R = R + 360°
  }
// ΔB = 0
else if( ΔL > 0 )
  R = 90°
else if( ΔL < 0 )
  R = 270°
```

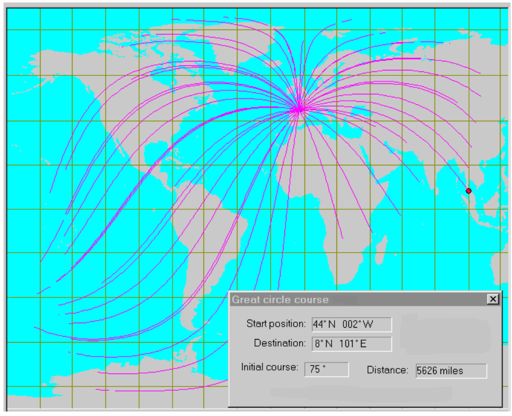
Distancia (millas náuticas):

```
if( R == 90 OR R == 270 )
  // cos R = 0
  d = |ΔL*cos B1|
else
  d = ΔB / cos R
d = d * 60
```

Derrota Ortodrómica

Variables

D Distancia Ortodrómica entre 1 y 2
Ri Rumbo inicial



Ortodrómicas desde una misma posición a diversos destinos

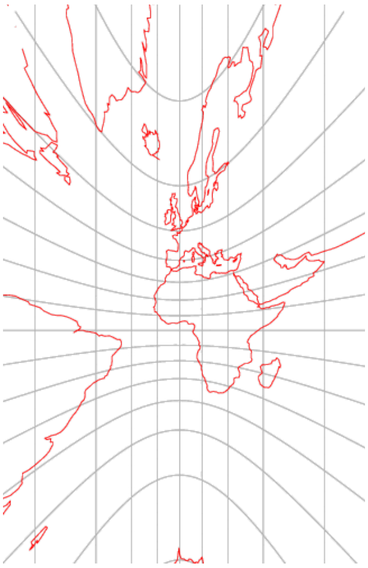
La **derrota Ortodrómica** resuelve el problema del rumbo y la distancia, a lo largo de un círculo máximo entre el punto de partida y el de llegada. Es el camino más corto entre dos puntos de una esfera, por lo que para distancias grandes el ahorro en el tiempo de navegación es importante.

Supone por lo tanto un modelo esférico de La Tierra.

Recibe el nombre de economía o **ganancia** de una derrota entre dos puntos, la diferencia de distancias que resulta de navegar por loxodrómica y por ortodrómica. Esta distancia crece al:

- Crecer la latitud
- Al decrecer la diferencia de latitud entre los dos puntos
- Al crecer la diferencia de longitud

Con este tipo de derrotas se utilizan las cartas náuticas de *proyección gnomónica*, ya que en ellas cualquier recta que se trace, es un arco de círculo máximo. Por lo tanto para trazar una derrota ortodrómica en ella basta con unir con una recta los puntos inicial y final.



Carta gnomónica.

La navegación que sigue una derrota ortodrómica tiene el inconveniente de que el rumbo es cambiante a lo largo de esta. En la práctica se divide la derrota Ortodrómica en tramos entre los cuales se navega por una loxodrómica, en la que el rumbo es constante: **Sistema de navegación por puntos**.

Un **círculo máximo** es generado por la intersección entre la superficie de una esfera y un plano que pase por su centro, (en realidad se trata de una circunferencia). Es el mayor círculo que puede ser trazado en la superficie de una esfera, y el arco que pasa por dos puntos representa la distancia más corta entre estos dentro de la superficie esférica.

Cualquier par de puntos están unidos por un solo círculo máximo, salvo los puntos correspondientes a las antípodas, (diametralmente opuestos; separados 180º), ya que están conectados por un número infinito de círculos máximos, (el rumbo y la distancia entre un punto y su antípoda no están definidos).

Todo circulo máximo bisecciona a otro. A excepción del ecuador, todo círculo máximo tiene una mitad en el hemisferio norte y la otra en el sur.

Todo par de puntos pertenecientes a un círculo máximo y separados 180º, tienen la misma latitud en valor, y de distinto nombre, y están separados 180º en longitud.

El punto de máxima latitud recibe el nombre de **vértice**, para cada círculo máximo hay dos vértices, uno en cada hemisferio y separados 180º en longitud.

Se llaman **nodos** a los dos puntos de cruce del círculo máximo con el Ecuador, en ellos la latitud es B_0 = 0º, y la longitud esta separada de los vértices 90º: $L_0 = L_v \pm 90º$

Rumbo inicial y Distancia entre dos puntos

$\Delta L = L2 - L1$

$-180º <= \Delta L <= 180º$

$$D = \mathrm{acos}(\sin B1 \sin B2 + \cos B1 \cos B2 \cos \Delta L)$$

D = 60*D [millas náuticas]

$$Ri = \mathrm{acos}\left(\frac{\sin B2 - \cos D \sin B1}{\sin D \cos B1}\right)$$

If($\Delta L < 0$) Ri = 360- Ri

(B1,L1, D, Ri) ⇨ (B2,L2)

cD = 90-D/60

$$B2 = 90º - \mathrm{acos}(\sin B1 \sin cD + \cos B1 \cos cD \cos Ri)$$

$$\Delta L = a\cos\left(\frac{\sin cD - \cos(90º\text{-}B2) \sin B1}{\sin(90º\text{-}B2) \cos B1}\right)$$

$L2 = L1 + \Delta L$

Ecuación de la latitud para la longitud media

Considerando una derrota ortodrómica desde el punto (B1, L1) al (B2, L2), la latitud Bm en el punto de longitud media Lm es [10]:

$$Lm = (L1 + L2) / 2$$

$$\tan B_m = \frac{\tan B_1 + \tan B_2}{2\cos(\frac{L_2 - L_1}{2})}$$

Empleando esta ecuación es posible hallar de forma sencilla las coordenadas de los puntos intermedios de la derrota ortodrómica, dividiendo cada tramo en dos partes iguales y calculando Lm y Bm para cada subtramo de forma recursiva.

Ejemplo

(B1, L1) = (43º 40.5'N 02º 0.00'W)
(B2, L2) = (45º 36.2'N 03º 15.5'W)

D = 127.56 millas náuticas
Ri = 335.09º

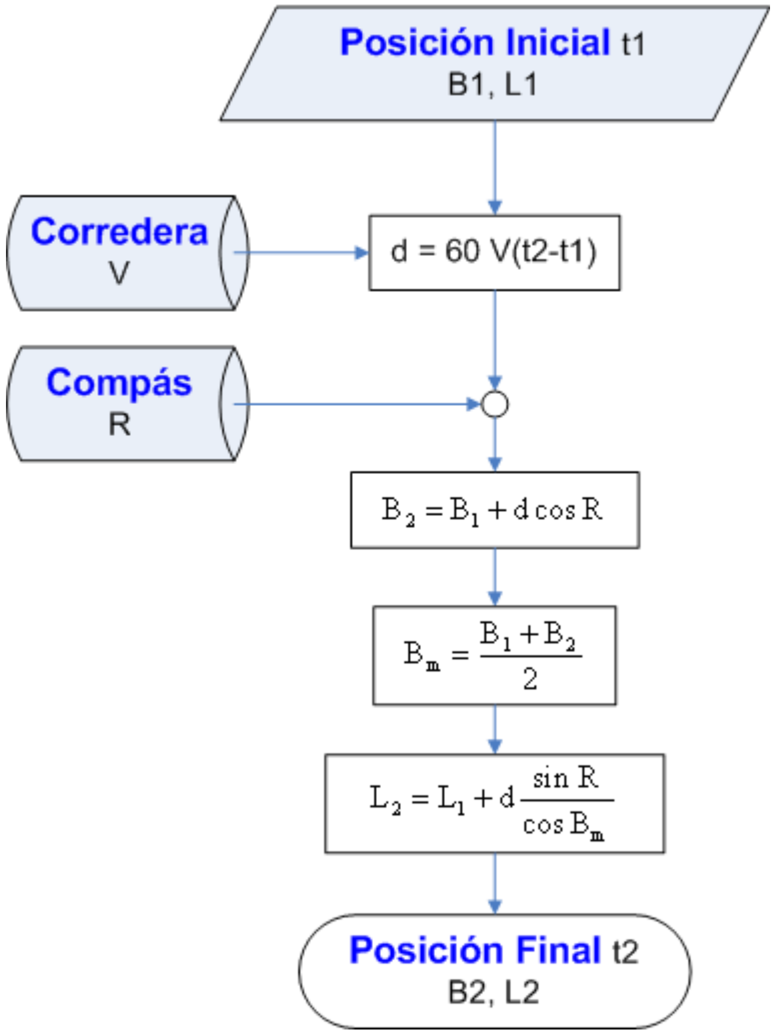
Derrota Mixta

Para limitar la latitud máxima en la derrota ortodrómica, y evitar así los hielos o el mal tiempo cerca de los polos, se utiliza una **derrota mixta**.

Se navega por ortodrómica hasta el paralelo de latitud extrema fijado, por loxodrómica a través de este paralelo hasta encontrar de nuevo el círculo máximo y de nuevo por ortodrómica hasta el punto de destino.

Estima de la posición

Navegación de Estima



Ejemplos

Comparación entre los distintos tipos de derrotas:

Ejemplo 1 pg 368 Bowditch

B1 = 32.245 º
L1 = -66.4817 º
B2 = 36.9783 º
L2 = -75.7033 º

	R	d
Latitud Media	301.9501	536.6754
Loxodrómica	301.8474	538.2231
Ortodrómica	304.5122	536.2734

Ejemplo 2 pg 368 Bowditch

B1 = 75.5283 º
L1 = -79.145 º
R = 155 º
d = 263.5 mn

	B2	L2
Latitud Media	71.5481	-72.5954
Loxodrómica	71.5481	-72.5672
Ortodrómica	71.457	-73.3044